

Poručík děl. v zál. Miroslav Menšík :

Výpočet polohy cíle na mapě, je-li dán jeho letecký snímek.

Práce vznikla z podnětu p. pplk. VZÚ. RNDr. Jos. Peterky během mého cvičení ve zbrani.

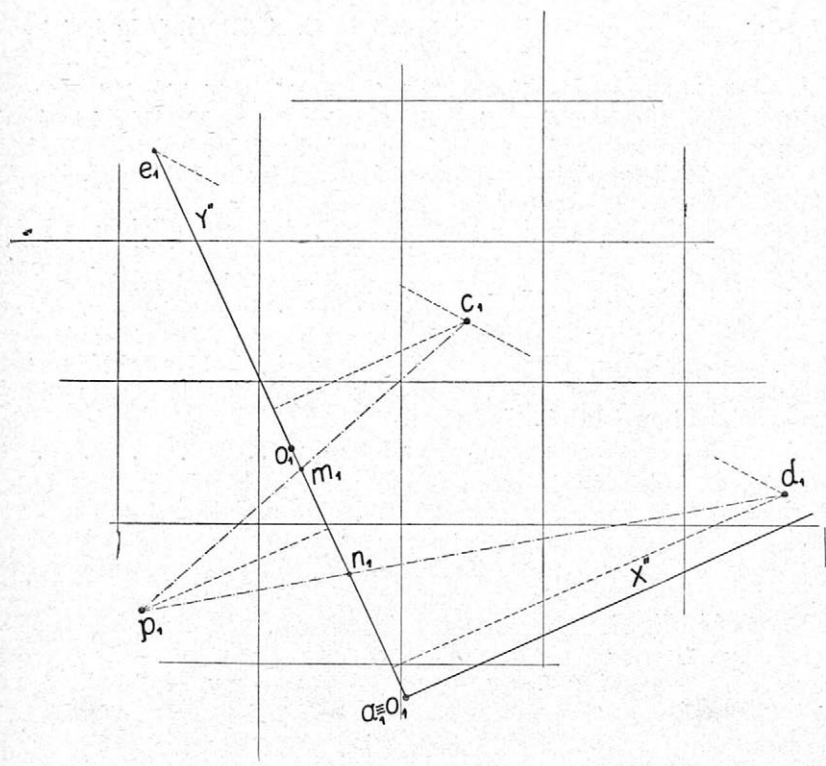
Bud' dán letecký snímek krajiny, provedený libovolným přístrojem, s libovolné výšky a jakkoli nakloněný. Za úkol máme najít v mapě lib. měřítka polohu jakéhosi cíle, který byl též na snímku zachycen. Celá další úvaha bude provedena za předpokladu rovinného terénu, t. j. takového, kde výškové rozdíly zobrazených bodů nepřesahují 1% výšky letu letounu, z kterého byl proveden snímek. Vzhledem k tomu, že se výška letu pohybuje obyčejně kolem 4000 m, činí ony rozdíly asi 40 m. Stane se ovšem případ, kdy tato mez je překročena, pak musíme provést určitou rektifikaci. Tím se však prozatím nezabývejme.

Graficky bývá úloha, běžná při vyhledávání cílů pro polní dělostřelectvo, obyčejně řešena t. zv. proužkovou methodou, která má výhodu v své rychlosti a v jednoduchosti provedení. Nevýhodou naproti tomu je její malá přesnost, a to zvláště tehdy, když se použité paprsky protínají pod příliš ostrým úhlem, takže se jejich průsečík stává nejistým. Také již přenášení bodů proužkem papíru a pak jeho od oka prováděné ztotožnění s příslušnými paprsky má vliv na jakost konstrukce. Každá sebe lépe provedená grafická konstrukce dá vždy jen přibližné výsledky. Přesnost můžeme získat jen výpočtem, o který v další úvaze jde, a to za použití co možná nejednodušších početních úkonů.

Na leteckém snímku, podobně jako při grafickém postupu, identifikujeme snímky čtyř bodů a, b, c, d , které můžeme také vyznačit na mapě v bodech a_1, b_1, c_1, d_1 . K svým dalším úvahám upotřebíme pravoúhlé soustavy souřadné, kde máme možnost volit si počátek a směr jedné osy. Nejlépe je ztotožnit počátek o s některým bodem, o nějž jde, na př. a , tedy $a = o$.

Všechny další výpočty budeme tedy provádět v souřadnicích x'' , y'' . Musíme-li přímo odměřovat z mapy polohy bodů (když nejsou číselně udány), ihned zavedeme tuto souřadnou soustavu; nebude třeba transformace a máme:

$$\begin{aligned} a_1 & (0, 0), \\ b_1 & (0, Y''_{b_1}), \\ c_1 & (x''_{c_1}, Y''_{c_1}), \\ d_1 & (x''_{d_1}, Y''_{d_1}). \end{aligned}$$



Obr. 2.

Vraťme se k vlastnímu problému a uvažujme o geometrických vlastnostech snímku a mapy, z nichž si vezmeme podklad pro analytické řešení. Pět na snímku daných bodů a, b, c, d, p se čtyřmi body v mapě a_1, b_1, c_1, d_1 a pátým hledaným p_1 , jsou ve vztahu projektivním, jak patrně ze vzniku fotografie a mapy. Je tedy bod p_1 jednoznačně stanoven. Podle Pappusovy věty víme, že se dvojpoměry promítáním nemění, čehož použijeme k výpočtu. Musíme se však dříve rozhodnout pro použití projektivních řad bodů nebo pro svazky paprskové. Při druhém způsobu máme na snímku dva svazky paprskové o střezech ve dvou libovolných bodech, na př. a, b (ze čtyř daných bodů a, b, c, d), a to takových, aby průsečíky dvou sobě si příslušejících paprsků byly dostatečně přesné, aby tedy svíraly dosti tupý úhel.

Tak vzniknou svazky na snímku

$$\begin{aligned} a & (P, B, C, D) \text{ a} \\ b & (P, A, C, D) \end{aligned}$$

o dvojpoměrech δ_a , resp. δ_b . Jim odpovídají na mapě svazky

$$\begin{aligned} a_1 & (P_1, B_1, C_1, D_1) \text{ a} \\ b_1 & (P_1, A_1, C_1, D_1) \end{aligned}$$

s dvojpoměry δ_{a1} , resp. δ_{b1} .

Protože platí projektivnost svazků

$$\begin{aligned} a & (PBCD) \overline{\wedge} a_1 (P_1B_1C_1D_1) \text{ a} \\ b & (PACD) \overline{\wedge} b_1 (P_1A_1C_1D_1), \text{ tedy jest i} \\ \delta_a & = \delta_{a1}, \quad \delta_b = \delta_{b1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Za použití dříve popsaného souřadného systému X, Y a X'', Y'' vyčíslíme úhly paprsků s osou Y a Y'' . Podle rovnice (1) najdu úhly, které svírá paprsek P a P_1 s osou Y'' a protínáním vpřed polohu bodu p_1 . Zdánlivě snadná cesta je však početně dosti dlouhá a zavedením úhlů značně složitá, podléhající mnoha chybám početním.

Proto se vrátíme raději k prvnímu způsobu, operujícímu s řadami bodů, kde vystačíme jen se čtyřmi základními početními úkony (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a vyhneme se odmocninám i goniometrickým funkcím. Ve snímku i na mapě sestrojíme průsečík e , resp. e_1 stran ab a cd , resp. a_1b_1 a c_1d_1 čtyřrohu $abcd$, resp. $a_1b_1c_1d_1$. Dále stanovíme průsečíky m, n paprsků pc, pd na ose Y (t. j. na spojnici ab) a taktéž na mapě najdeme na Y'' body m_1, n_1 . Vzhledem k projektivnosti obou rovinných útvarů, zůstane i projektivita řady bodů.

$$abemn \dots a_1b_1e_1m_1n_1 \dots \quad (2)$$

neboli stálost jejich dvojpoměrů. Toho užijeme k výpočtu. Souřadnice onoho bodu e jsou $x_e = \phi$ a y rovná se úseku spojnice cd na ose Y :

$$cd \Xi \begin{vmatrix} x, y, 1 \\ x_c, y_c, 1 \\ x_d, y_d, 1 \end{vmatrix},$$

neboli pro náš případ

$$\begin{vmatrix} \phi, y_e, 1 \\ x_c, y_c, 1 \\ x_d, y_d, 1 \end{vmatrix} = \phi, \text{ t. j. } x_d y_e + x_c y_d - x_d y_c - x_c y_e = \phi, \text{ odkud}$$

$$y_e = \frac{x_d y_c - x_c y_d}{x_d - x_c} = y_c - \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \quad (3)$$

Máme konečně

$$e (0, y_e - \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \cdot x_e) \dots \quad (4)$$

$$\text{a taktéž podobně: } y''_{e1} = y''_{c1} - \frac{y''_{d1} - y''_{c1}}{x''_{d1} - x''_{c1}} \cdot x''_{e1}.$$

Podobně vyhledáme souřadnice bodů m, n , o nichž již víme, že $x_m = \phi$ a $y_n = \phi$. Pak podle rovnice (3) záměnou indexů je dále

$$y_m = y_c - \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \cdot x_c \quad (5)$$

a

$$y_n = y_d - \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \cdot x_d \quad (6)$$

Tedy

$$m(0, y_c - \frac{y_p - y_c}{x_p - x_c} \cdot x_c), \dots \dots \dots (7)$$

$$n(0, y_d - \frac{y_p - y_d}{x_p - x_d} \cdot x_d), \dots \dots \dots (8)$$

Hledejme v situaci odpovídající body m_1, n_1 , jejichž spojnice s body c_1 a d_1 určí svým průsečíkem bod p_1 . Projektivnost v rovnici (2) jest určena třemi družinami bodů, a to

$$\begin{aligned} &aa_1, \\ &bb_1, \\ &ee_1. \end{aligned}$$

Abychom stanovili rovnice přímek c_1m_1 a d_1n_1 , změříme na mapě souřadnice základních bodů

$$\begin{aligned} &a_1(0, y''_{a1}), \\ &b_1(0, y''_{b1}), \\ &c_1(x''_{c1}, y''_{c1}), \\ &d_1(x''_{d1}, y''_{d1}). \end{aligned}$$

Podobně jako v rovnici (4) jest

$$e_1(0, y''_{c1} - \frac{y''_{d1} - y''_{c1}}{x''_{d1} - x''_{c1}} \cdot x''_{c1}).$$

Vzhledem na rovnici (2) budou promítnutím zachovány dvojpoměry neboli

$$(abem) = \delta_m = (a_1b_1e_1m_1) \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{a} \quad (aben) = \delta_n = (a_1b_1e_1n_1) \dots \dots \dots$$

Tím jest jednoznačně určena poloha bodů m_1 a n_1 ; vypočteme tedy jejich souřadnice y , protože $x''_{m1} = \phi$ a $y''_{n1} = \phi$. Nejprve na snímku platí

$$\delta_m = \frac{\lambda_e}{\lambda_m} \dots \dots \dots (12)$$

$$\delta_n = \frac{\lambda_e}{\lambda_n} \dots \dots \dots (13)$$

při čemž dělicí poměry jsou

$$\lambda_e = \frac{ae}{be} = \frac{y_e}{y_e - y_b},$$

$$\lambda_m = \frac{am}{bm} = \frac{y_m}{y_m - y_b},$$

$$\lambda_n = \frac{an}{bn} = \frac{y_n}{y_n - y_b},$$

Dosaďme do rovnic (12) a (13):

$$\delta_m = \frac{y_e \cdot (y_m - y_b)}{y_m \cdot (y_e - y_b)}, \dots \dots \dots (14)$$

$$\delta_n = \frac{y_e \cdot (y_n - y_b)}{y_n \cdot (y_e - y_b)}, \dots \dots \dots (15)$$

Podle (10) a (11) bude vzhledem na rovnice (14) a (15)

$$\frac{y_e \cdot (y_m - y_b)}{y_m \cdot (y_e - y_b)} = \frac{y''_{e1} \cdot (y''_{m1} - y''_{b1})}{y''_{m1} \cdot (y''_{e1} - y''_{b1})}, \quad (17)$$

a podobně:

$$\frac{y_e \cdot (y_n - y_b)}{y_n \cdot (y_e - y_b)} = \frac{y''_{e1} \cdot (y''_{n1} - y''_{b1})}{y''_{n1} \cdot (y''_{e1} - y''_{b1})}, \quad (18)$$

kde neznáme souřadnice y''_{m1} , y''_{n1} . Dostaneme tedy z (17):

$$y''_{m1} \cdot (y''_{e1} - y''_{b1}) \cdot (y_m - y_b) y_e = y''_{m1} y_m y''_{e1} \cdot (y_e - y_b) - y''_{b1} y''_{e1} y_m \cdot (y_e - y_b),$$

$$\text{odtud } y''_{m1} - y''_{m1} \cdot \frac{y''_{e1} y_m \cdot (y_e - y_b)}{(y''_{e1} - y''_{b1}) (y_m - y_b) y_e} = \frac{y''_{b1} y''_{e1} y_m \cdot (y_b - y_e)}{(y''_{e1} - y''_{b1}) \cdot (y_m - y_b)},$$

$$\text{odkud konečně } y''_{m1} = \frac{y''_{b1} y''_{e1} y_m (y_b - y_e)}{y''_{e1} y_b (y_m - y_e) + y_e y''_{b1} (y_b - y_m)}. \quad (19)$$

Právě tak podle rovnice (18) platí

$$y''_{n1} = \frac{y''_{b1} y''_{e1} y_n (y_b - y_e)}{y''_{e1} y_b (y_n - y_e) + y_e y''_{b1} (y_b - y_n)}, \quad (20),$$

čímž jsou stanoveny polohy bodů m_1 , n_1 na ose Y . Pro rychlejší číselný výpočet můžeme zavést označení

$$p = y''_{b1} y''_{e1} (y_b - y_e), \quad (21)$$

$$q = y_b y''_{e1} - y''_{b1} y_e, \quad (22)$$

$$r = y_b y_e (y''_{b1} - y''_{e1}), \quad (23)$$

čímž rovnice (10) a (20) nabudou tvaru

$$y''_{m1} = \frac{y_m \cdot p}{y_m \cdot q + r}, \quad (24)$$

$$y''_{n1} = \frac{y_n \cdot p}{y_n \cdot q + r}, \quad (25)$$

Abychom vyhledali průsečík přímek $m_1 c_1$ a $n_1 d_1$, kterým je hledaný bod $p_1 (x''_{p1}, y''_{p1})$, musíme řešit dvě lineární rovnice tvaru

$$m_1 c_1 \ni \begin{vmatrix} x'', y'', 1 \\ x''_{c1}, y''_{c1}, 1 \\ 0, y''_{m1}, 1 \end{vmatrix}, \quad (26)$$

$$n_1 d_1 \ni \begin{vmatrix} x'', y'', 1 \\ x''_{d1}, y''_{d1}, 1 \\ 0, y''_{n1}, 1 \end{vmatrix}, \quad (27)$$

neboli z rovnice (26) máme

$$x''_{p1} = x''_{c1} \cdot \frac{y''_{p1} - y''_{m1}}{y''_{c1} - y''_{m1}}, \quad (28)$$

a zavedeme-li opět pro snazší číselný výpočet označení

$$t = x''_{d1} (y''_{c1} - y''_{m1}), \quad (29)$$

$$u = x''_{c1} (y''_{d1} - y''_{n1}), \quad (30)$$

je rovnice (28) nyní

$$x''_{p1} = x_{e1} x_{d1} \frac{y''_{p1} - y''_{m1}}{t} \quad (31)$$

Dosaďme do rovnice (27)

$$x''_{p1} (y''_{d1} - y''_{n1}) = x''_{d1} (y''_{p1} - y''_{n1}),$$

neboli

$$x''_{e1} \cdot \frac{y''_{p1} - y_{m1}}{y''_{e1} - y_{m1}} \cdot (y''_{d1} - y''_{n1}) = x''_{d1} \cdot (y''_{p1} - y''_{n1}),$$

odtud

$$y''_{p1} = \frac{x''_{e1} y''_{m1} (y''_{d1} - y''_{n1}) - x''_{d1} y''_{n1} (y''_{e1} - y''_{m1})}{x''_{e1} \cdot (y''_{d1} - y''_{n1}) - x''_{d1} \cdot (y''_{e1} - y''_{m1})}$$

nebo vzhledem k výrazům (29), (30) konečně

$$y''_{p1} = \frac{y''_{m1} \cdot u - y''_{n1} \cdot t}{u - t} \quad (32),$$

čímž úkol proveden.

Abychom prakticky předvedli použití, provedme početní příklad. Za předpokladu, že budeme měřit s přesností na 0.1 mm, odměřme na snímku a na mapě souřadnice čtyř základních bodů a cíle (jen na snímku)

$$\begin{array}{ll} a(0, 0), & a_1(0, 0), \\ b(0, 34'6), & b_1(0, 39'0), \\ c(22'2, 43'5), & c_1(30'1, 45'1), \\ d(52'7, 14'3), & d_1(60'9, 4'2), \\ p(-24'1, 19'8); & \end{array}$$

při souřadném systému $o \in a$, $Y \in ab$, $X \perp Y$.

Z rovnic (3) vypočítáme souřadnici bodu e a e_1 ,

$$\begin{array}{l} y_e = 64'332, \\ y''_{e1} = 85'071. \end{array}$$

Podle (5) a (6) najdeme souřadnice bodů m , n

$$\begin{array}{l} y_m = 32'083, \\ y_n = 18'600. \end{array}$$

Výsledky dosadíme do rovnic (21) až (25)

$$\begin{array}{l} p = -98643'89, \\ q = 434'509, \\ r = -102548'85, \\ y''_{m1} = 35'717, \\ y''_{n1} = 19'422, \end{array}$$

ty opět do (29) a (30)

$$\begin{array}{l} t = 571'435, \\ u = -458'182, \end{array}$$

Konečně výsledky dosadíme do (31) a (32)

$$\begin{array}{l} y''_{p1} = 26'673, \\ x''_{p1} = -29'012, \end{array}$$

čímž poloha cíle nalezena, a přeneseme ji do mapy.

Ze všeho je vidět, že výpočet, zvláště když je počítán počítačím strojem, je snadný i rychlý. Pracovní čas činí asi čtvrt hodiny. Je sice delší než při postupu grafickém, ale nutno uvážit okolnosti, uvedené na počátku článku, které určí, kdy který postup je právě na místě.

D o s l o v.

Poznámky pplk. VZÚ. Dr. Josefa Peterky k článku prof. Menšíka.

Článek prof. Menšíka, asistenta čes. techniky v Praze, je příspěvkem k řešení požadavku plynoucího v posledních letech při soustavném zhušťování stávajících trigonometrických sítí zejména tam, kde t. č. chybějí plánové podklady a kde jsme stále více odkázáni na využití letecké fotogrametrie s takovou přesností, aby všem potřebám alespoň jako improvisace vyhověla.

Při tom je ovšem nutno spokojiti se s menší přesností, než jaké možno dosáhnout při obyčejném geodetickém zhušťování.

Grafický způsob provádění t. zv. proužkové metody je a bude vždy nejrychlejší a proto nejužívanější metodou pro řešení úkolu překreslování jednotlivých bodů ze snímku do plánu. Při tom lze v nepříznivějším případě, t. j. při nejvhodnějším druhu snímku, při nejhodnotnějším podkladě daných vstavných bodů a při nejpečlivějším kreslení, počítati s pravděpodobnou chybou asi 0,5 mm, neboli 12,5 m v mapě 1 : 25.000. Podle zkušeností bývá v praxi chyba 3 až 4krát větší, protože závisí na řadě osobitých chybových vlivů.

Zpravidla stačí tato přesnost pro ostřelování cílů z děl, nestačí však pro zhušťování triangulačních sítí z leteckých snímků vyhodnocených jednosnímkovou metodou, a dokonce nestačí pro dvojice bodů sobě blízkých — jak bývá v nepřehledném, zalesněném území, z nichž mají býti odvozeny směrníky pro střelbu na velkou vzdálenost.

Jest proto vítat každý námět, který by umožnil zvýšit podstatně přesnost bodů i fotogrametricky určených. Náhradou grafického způsobu proužkové metody obdobným postupem početním bylo by snad možno — za předpokladu použití koordinatometrů a vhodných početních formulářů — metodu aplikovat i na nouzové zhušťování bez prací geodetických.

Protože se dají jednoduchým způsobem vyloučit skreslení jednotlivých bodů, vzniklá na snímku různými výškami v terénu, a tím každý snímek hornatého terénu redukovat na snímek území rovinného, možno metody použití s úspěchem i v území hornatém, zejména tehdy, možno-li vzájemná převýšení vstavných bodů a cílů přesně početně určit Zeissovým zrcadlovým stereoskopem s mikrometrem anebo stereokomparografem.

Příspěvek autora článku je proto cenný, protože navrženou početní improvisací se mají se všeobecnit možnosti přesnějšího vyhodnocování leteckých snímků a decentralisovat možnost provedení přesnějších fotogrametrických úkonů na útvary, které nejsou vybaveny tak nákladnými a dokonalými přístroji jako měřické ústředny, které shora uvedené úkoly s dostatečnou přesností mohou provést nejradikálnějším a nejvydatnějším způsobem leteckou triangulací (řadovým vyhodnocovačem, radiálním triangulátorem atd.).